Elektrischer Fluss

Ein Fluss eines Vektorfeldes $\vec{v}$ durch eine Oberfläche mit dem Normalvektor $\vec{n}$ ist definiert als

$$\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S \vec{v} \cdot \frac{\left(\overrightarrow{r_u}(u,v) \times \overrightarrow{r_v}(u,v)\right)}{\left|\overrightarrow{r_u}(u,v) \times \overrightarrow{r_v}(u,v)\right|}\, du\, dv$$

In diesem Beispiel geht es um den elektrischen Fluss, d.h. es handelt sich beim Vektorfeld um das elektrische Vektorfeld

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{|(x,y,z)|^3} \cdot (x,y,z) = \frac{q}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

handeln. Anhand von Beispielen soll die Berechnung des Flusses gezeigt werden.

b) Als erstes wird der elektrische Fluss im Inneren einer **Kugel mit Radius 1** berechnet. Dazu werden die Kugelkoordinaten verwendet. Der Richtungsvektor $\vec{r}$ entspricht dann in Kugelkoordinaten dem Vektor:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = 1$$

Um den Normalvektor auf die Kugeloberfläche zu erhalten, wird $\vec{r}$ einmal nach φ und einmal nach θ abgeleitet und das Vektorprodukt der beiden Ableitungsvektoren ist dann der Vektor, der senkrecht auf der Kugeloberfläche steht und muss anschliessend noch normiert werden, um den gesuchten Normalvektor zu erhalten.

$$\vec{r}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta)^2 \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\right| = \sin(\theta)$$

Nun wird das elektrische Vektorfeld mit dem Normalvektor multipliziert und dann integriert. Übersichtlichkeitshalber wird zuerst die Funktion berechnet die integriert wird.

$$\frac{q}{|(x,y,z)|^3} \cdot (x,y,z) \cdot \frac{\left(\overrightarrow{r_\theta}(u,v) \times \overrightarrow{r_\varphi}(u,v)\right)}{\left|\overrightarrow{r_\theta}(u,v) \times \overrightarrow{r_\varphi}(u,v)\right|} = q \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = q \cdot \sin(\theta)$$

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q \cdot \sin(\theta)\; d\theta\, d\varphi = 4\pi q$$

Als nächstes soll eine **Kugel mit beliebigem Radius** betrachtet werden. Die einzelnen Komponenten werden sich wie folgt ändern:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = R \qquad \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta)^2 \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \left|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\right| = R^2 \sin(\theta)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{R^3} \cdot R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{q}{R^2}$$

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q}{R^2} \cdot R^2 \sin(\theta)\; d\theta\; d\varphi = 4\pi q$$

Das Resultat zeigt, dass der Fluss unabhängig vom Radius ist.
Für einen **Zylinder** mit Höhe 2h gilt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{Rcos}(\varphi) \\ \mathrm{Rsin}(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad |\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2} \quad \vec{r}_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = \begin{pmatrix} \mathrm{Rcos}(\varphi) \\ \mathrm{Rsin}(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} \frac{q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Rcos}(\varphi) \\ \mathrm{Rsin}(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot R\, dz\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} \frac{q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot R^2\, dz\, d\varphi = 2\pi R^2 q \cdot \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2} \cdot R^2} \right]_{z=-h}^{z=h} = \frac{4\pi R^2 q h}{R^2 \cdot \sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{4\pi q h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Um den Fluss für einen endlich langen Zylinder zu berechnen, lässt man die Höhe gegen Unendlich streben.

$$\lim_{h \to \infty} \frac{4\pi q h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \lim_{h \to \infty} \frac{4\pi q}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2} + 1}} = 4\pi q$$

c) Die Ladung soll jetzt ausserhalb der Kugel liegen. Hier darf man den Satz von Gauss verwenden, da das E-Feld überall definiert ist. Bei der vorherigen Aufgabe, wo die Ladung im Inneren war, war das nicht möglich, da das E-Feld im Nullpunkt nicht definiert ist. Mit dem Satz von Gauss lässt sich der Fluss berechnet mit:

$$\phi = \int \int_V \int div\ \vec{v}\ \mathrm{dV} = \int \int_V \int div\ \vec{E}\ \mathrm{dV}$$

Da die Divergenz des elektrischen Flusses Null (siehe Vorlesung) ist, wird demensprechend jedes Integral, egal welche Grenzen eingesetzt werden, Null sein.

d) Die Annahme ist, dass die Flüsse identisch sind. Aufgrund der vorherigen Aufgaben ist bekannt, dass in beiden Volumen der elektrische Fluss existiert und dass die Divergenz null ist. Ausserdem ist ersichtlich, dass der Rand von W/V aus den Oberflächen von W und V besteht, welche entgegengesetzt sind. Daraus folgt:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int \int_{W/V} \int div\ \vec{v}\ \mathrm{dV} = 0$$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\partial W} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS - \iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

$$\iint_{\partial W} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$$